OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2018

Clasa a VI-a

1. a) Aflați cifra x astfel încât:
$\overline{0{,}1(1x)} + \overline{0{,}2(2x)} + \overline{0{,}3(3x)} + \ldots + \overline{0{,}9(9x)} = \frac{4923}{990}$.
b) Fie numărul rațional $r = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \cdots + \frac{99}{100^2}$. Arătați că $r < 6$.

2. a) Dacă $5 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}$, arătați că $\overline{abcd}$ este multiplu de 21.
b) Dacă $\overline{abc} = 89 \cdot d$, arătați că $\overline{abcd}$ este multiplu de 33.

3. Determinați toate dreptunghiurile, cu lungimile laturilor exprimate în numere naturale, pentru care aria și perimetrul se exprimă prin același număr.

4. Fie unghiurile $\measuredangle AOB$ și $\measuredangle BOC$ adiacente complementare și $[OD$ bisectoarea unghiului $\measuredangle AOB$. Se știe că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\measuredangle BOD$ și $\measuredangle BOC$ este de $37^\circ 30'$.
a) Arătați că $m(\measuredangle BOC) = 4 \cdot m(\measuredangle BOD)$.
b) Fie $E \in OB$ astfel încât $O \in (EB)$. Aflați măsura unghiului format de bisectoarea unghiului $\measuredangle AOE$ și semidreapta $[OB$.

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 2 ore.*

Soluții și bareme orientative
Clasa a VI-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

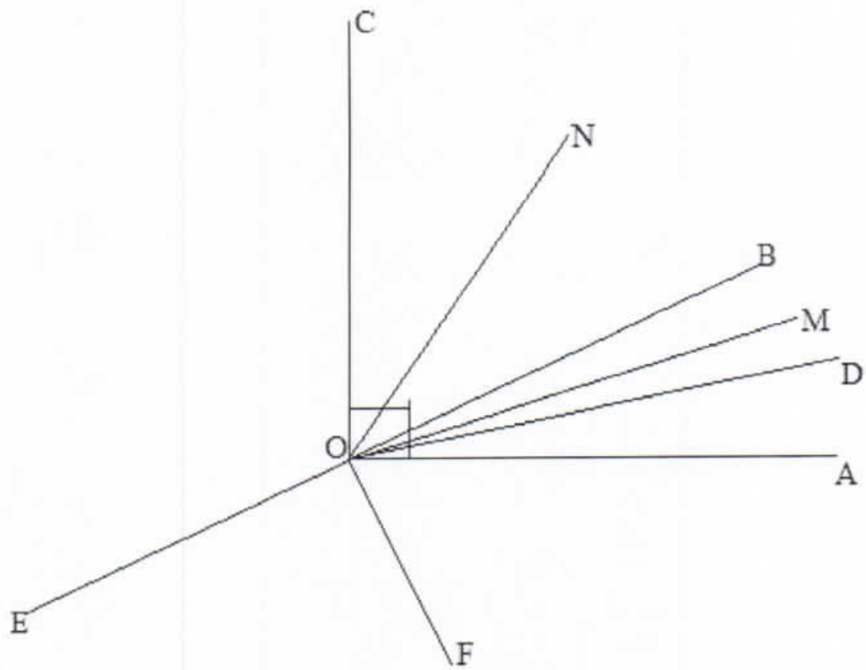
1. a) Ecuația dată revine la: $\frac{\overline{11x}-1}{990}+\frac{\overline{22x}-2}{990}+\ \dots+\frac{\overline{99x}-9}{990}=\frac{4923}{990}$, adică
$\overline{11x}+\overline{22x}+\ \dots+\overline{99x}-(1+2+\ \dots\ +9)=4923$, **(2p)**
deci la $\overline{11x}+\overline{22x}+\ \dots+\overline{99x}=4968 \Leftrightarrow 110+x+220+x+\ \dots\ +990+x=4968 \Leftrightarrow$
$9x=4968-110(1+2+\ \dots\ +9) \Leftrightarrow 9x=4968-4950=18$, deci $x=2$. **(2p)**

b) Folosim $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2,$
$r=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{63}{64^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{99}{99\cdot 100}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}$. **(1p)**
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2\cdot\frac{1}{2}$,
$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<4\cdot\frac{1}{4}$,
$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ \dots+\frac{1}{15}<8\cdot\frac{1}{8}$,
$\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\ \dots+\frac{1}{31}<16\cdot\frac{1}{16}$,
$\frac{1}{32}+\frac{1}{33}+\ \dots+\frac{1}{63}<32\cdot\frac{1}{32}$,
$\frac{1}{64}+\frac{1}{65}+\ \dots+\frac{1}{100}<37\cdot\frac{1}{64}<64\cdot\frac{1}{64}$, **(1p)**
$r<1+1+1+1+1+1=6$. **(1p)**

2. a) $\overline{abcd}=100\cdot\overline{ab}+\overline{cd}=100\cdot\overline{ab}+5\cdot\overline{ab}=$ **(2p)**
$=105\cdot\overline{ab}=21\cdot 5\cdot\overline{ab}$, de unde deducem că $21|\overline{abcd}$. **(2p)**
b) $\overline{abcd}=10\cdot\overline{abc}+d=89\cdot d\cdot 10+d=$ **(2p)**
$=891\cdot d=33\cdot 27\cdot d$, de unde rezultă $33|\overline{abcd}$. **(1p)**

3. Notând lungimile laturilor cu x și y avem: $xy=2x+2y$ sau $x(y-2)=2y$, **(2p)**
de unde $x=\frac{2y}{y-2}=\frac{2y-4+4}{y-2}=\frac{2(y-2)}{y-2}+\frac{4}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}$. **(2p)**
Cum x și y sunt numere natural, trebuie ca $\frac{4}{y-2}$ să fie număr natural, adică $(y-2)\ |4$. **(1p)**
Obținem $y\in\{3,4,6\}$ și atunci avem un dreptunghi cu lungimea de 6 unități și lățimea de 3 unități și un pătrat cu latura de 4 unități. **(2p)**

4. a) Fie $[OM, [ON$ bisectoarele unghiurilor $\measuredangle BOD$ respectiv $\measuredangle BOC$. Notăm
$m(\measuredangle BOM)=x, m(\measuredangle BON)=y$. Rezultă $x+y=37^\circ 30'$ și $2x+y=45^\circ$ **(2p)**
Obținem $x=7^\circ 30', y=30^\circ$ de unde $m(\measuredangle BOC)=2y=60^\circ, m(\measuredangle BOD)=2x=15^\circ$ deci
$m(\measuredangle BOC)=4\cdot m(\measuredangle BOD)$ **(2p)**
b) Fie $[OF$ bisectoarea unghiului $\measuredangle AOE$. $m(\measuredangle AOE)=150^\circ \Rightarrow m(\measuredangle AOF)=m(\measuredangle EOF)=75^\circ$. **(1p)**
$m(\measuredangle BOF)=m(\measuredangle AOB)+m(\measuredangle AOF)=30^\circ+75^\circ=105^\circ$. **(2p)**


C
N
B
M
D
O
A
E
F