Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a IX –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1

a) Să se determine primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă:
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{25}=950$ *și* $2a_3-a_7=-4$.

b) Fie șirul de numere reale $(c_n)_{n\geq 1}$, definit prin $c_1=1,\ c_{n+1}-2c_n=1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$, definit prin $b_n=1+c_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ este o progresie geometrică.

SOLUȚIE:

a) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{25}=950 \Leftrightarrow a_1+(a_1+r)+(a_1+2r)+\cdots+(a_1+24r)=950 \Leftrightarrow$

$25a_1+r(1+2+\cdots+24)=950 \Leftrightarrow 25a_1+300r=950 \Leftrightarrow a_1+12r=38$ 1p

$2a_3-a_7=-4 \Leftrightarrow a_1-2r=-4$ 1p

$\begin{cases} a_1+12r=38 \\ a_1-2r=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=2 \\ r=3 \end{cases}$ 2p

b) $c_1=1,\ b_1=1+c_1=1+1=2,\ c_{n+1}-2c_n=1 \Rightarrow c_{n+1}=2c_n+1 \Rightarrow c_n>0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1+2c_n+1}{1+c_n}=\frac{2(1+c_n)}{1+c_n}=2$ 2p

$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică cu $b_1=2$ și rația $q=2$. 1p

Subiectul 2

În triunghiul ABC se consideră punctul E mijlocul segmentului $[AB]$, F mijlocul medianei din C, $D\in(BC)$ astfel încât $BD=2\cdot DC$ și $P\in(AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{AC}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{BA}$.

b) Să se arate că punctele A, F și D sunt coliniare.

c) Să se calculeze raportul $\frac{AF}{AD}$.

SOLUȚIE:

a) $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{AC}$. 1p

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$. 1p

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}\cdot\left(-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BA}-\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{BA}$ 1p

b) În triunghiul ABC punctul E este mijlocul segmentului $[AB]$, de unde rezultă că $[CE]$ este mediana din C și F este mijlocul segmentului $[CE]$.

În triunghiul AEC se aplică teorema medianei și se obține:

$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}\right)$. 1p

$D\in(BC), BD=2\cdot DC \Rightarrow \overrightarrow{BD}=2\cdot\overrightarrow{DC}$. Rezultă că punctul D împarte segmentul $[BC]$ în raportul $k=2$.

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{1+2}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{1+2}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}\right)$. 1p

$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AF}$ și $\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari $\Rightarrow A, F, D$ sunt puncte coliniare. 1p

c) $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AD} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AF}\right|=\left|\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AD}\right| \Rightarrow AF=\frac{3}{4}\cdot AD \Rightarrow \frac{AF}{AD}=\frac{3}{4}$. 1p

Subiectul 3

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$.

a) *Să se determine soluțiile reale ale ecuației:* $\left(f(x)\right)^2 + 2 \cdot f(x) - 3 = 0$.

b) *Determinați funcția* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g = \underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{f\ este\ de\ n\ ori}$, *unde* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, *iar* " $\circ$ " *reprezintă compunerea funcțiilor.*

c) *Să se calculeze:* $f(1) \cdot f(2) + f(2) \cdot f(3) + \cdots + f(99) \cdot f(100) +\ f(100) \cdot f(101)$.

SOLUȚIE:

a) $\left(f(x)\right)^2 + 2 \cdot f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + 2 \cdot (2x-1) - 3 = 0$...1p

În urma calculului se obține: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ 1p

b) $(f \circ f)(x) = f\left(f(x)\right) = 2(2x-1) - 1 = 2^2x - 2 - 1 = 2^2x - 2^2 + 1$

$(f \circ f \circ f)(x) = 2^3x - 2^3 + 1$ 1p

$P(n)$: $(\underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{f\ este\ de\ n\ ori})(x) = 2^n x - 2^n + 1, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ 1p

I. $P(2)$ este adevărată.

II.Presupunem adevărată $P(k)$: $(\underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{f\ este\ de\ k\ ori})(x) = 2^k x - 2^k + 1,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$.

Demonstrăm că este adevărată $P(k+1)$: $(\underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{f\ este\ de\ k+1\ ori})(x) = 2^{k+1}x - 2^{k+1} + 1$.

$(\underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{f\ este\ de\ k+1\ ori})(x) = f((\underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{f\ este\ de\ k\ ori})(x)) = 2(2^k x - 2^k + 1) - 1 = 2^{k+1}x - 2^{k+1} + 2 - 1$

$= 2^{k+1}x - 2^{k+1} + 1 \Longrightarrow P(k+1)$ este adevărată .

Din I. și II. $\Rightarrow P(n)$ este adevărată $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

$g(x) = (\underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{f\ este\ de\ n\ ori})(x) = 2^n x - 2^n + 1,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ 1p

c) $f(k) \cdot f(k+1) = (2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 1p

$f(1) \cdot f(2) + f(2) \cdot f(3) + \cdots + f(n) \cdot f(n+1) = \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 1) = 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n =$

$= \frac{n(4n^2+6n-1)}{3} \Rightarrow\ f(1) \cdot f(2) + f(2) \cdot f(3) + \cdots + f(99) \cdot f(100) + f(100) \cdot f(101) =$1353300…….1p

Subiectul 4.

Trei motocicliști, A, B și C, parcurg aceeași distanță, traiectoria lor fiind o linie dreaptă. Motociclistul B parcurge distanța cu viteza de $60 km/h$*, iar motociclistul C cu viteza de* $40 km/h$*. Știind că B merge cu 2 ore mai puțin decât A, iar C merge cu 2 ore mai mult decât A, determinați viteza motociclistului A. Legea mișcării este* $v = \frac{d}{t}$*, unde* v *este viteza*$[km/h]$*, d este distanța*$[km]$*, iar t este timpul*$[h]$.

SOLUȚIE:

Fie d distanța parcursă de motocicliști exprimată în km, t numărul de ore în care motociclistul A parcurge distanța d, iar v_A, v_B, v_C reprezintă vitezele celor trei motocicliști.

$d = v_A \cdot t,\ d = v_B \cdot (t-2),\ d = v_C \cdot (t+2)$ 3p

$v_B = 60\ [km/h],\ v_C = 40[km/h] \Rightarrow 60 \cdot (t-2) = 40 \cdot (t+2)$. 1p

$60t - 120 = 40t + 80 \Rightarrow 20t = 200 \Rightarrow t = 10\ [h]$. 1p

$d = v_B \cdot (t-2) = 60 \cdot 8 = 480 \Rightarrow d = 480\ [km]$. 1p

$d = v_A \cdot t \Rightarrow 480 = v_A \cdot 10 \Rightarrow v_A = 48\ [km/h]$. 1p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a X –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x + x$.

a) Demonstrați că $n = f(3\,log_2 5) - f(log_2 500)$ *este un număr întreg.*

b) Să se arate ca funcția f este injectivă.

c) *Rezolvați în mulțimea* $(0, \pi)$ *ecuația* $2^{sin^2 x} - 2^{cos^2 x} = cos2x$.

SOLUȚIE:

a) Calculează $f(3\log_2 5) = 125 + \log_2 125$ și $f(\log_2 500) = 500 + \log_2 500$........................1p

Obține $n = -375 + \log_2 \frac{1}{4} = -377$ care este număr intreg..1p

b) Funcțiile $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2^x$ *și* $h(x) = x$ sunt strict crescătoare....................................1p

Funcția f este strict crescătoare (sumă de funcții strict crescătoare) de unde rezultă că f este funcție injectivă...1p

c) Obține $2^{sin^2 x} + sin^2 x = 2^{cos^2 x} + cos^2 x$...1p

Din f injectivă deduce că $sin^2 x = cos^2 x$...1p

Folosind $sin^2 x + cos^2 x = 1$, obține $sinx = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cum $x \in (0, \pi)$, găsește soluția $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$...1p

SUBIECTUL 2

Fie ecuația $(1+i)x^2 - 2mx + m - i = 0, m \in \mathbb{R}$.

a) Pentru m=1 rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe.

b) *Pentru* $m = -1$, *arătați că numărul* $\frac{1}{x_1^2 + x_1 - 2} + \frac{1}{x_2^2 + x_2 - 2}$ *este real, unde* x_1 și x_2 *sunt rădăcinile ecuației.*

c) Determinați numerele reale m pentru care ecuația are o rădăcină reală.

SOLUȚIE:

a) Obține ecuația $(1+i)x^2 - 2x + 1 - i = 0$ cu soluțiile $x_1 = 1$ *și* $x_2 = -i$.............................1p

b) $(1+i)x^2 + 2x - 1 - i = 0 \Leftrightarrow x^2 + (1-i)x - 1 = 0$ (prin înmulțire cu $1 - i$), cu rădăcinile x_1*și* x_2 care au $S = -1 + i$ *și* $P = -1$..1p

Deduce că $x_1^2 + (1-i)x_1 - 1 = 0$ *și* $x_2^2 + (1-i)x_2 - 1 = 0$ și obține $x_1^2 + x_1 - 2 = -1 + ix_1$ și $x_2^2 + x_2 - 2 = -1 + ix_2$..1p

Finalizare $\frac{1}{x_1^2 + x_1 - 2} + \frac{1}{x_2^2 + x_2 - 2} = \frac{iS - 2}{-P - iS + 1} = -1 \in \mathbb{R}$..1p

c) Dacă α este soluția reală a ecuației rezultă că:

$(1+i)\alpha^2 - 2m\alpha + m - i = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2m\alpha + m + i(\alpha^2 - 1) = 0, cu\ m, \alpha \in \mathbb{R}$............1p

Deduce că $\alpha^2 - 2m\alpha + m = 0\ și\ \alpha^2 - 1 = 0$ de unde obține $m \in \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$..........................2p

SUBIECTUL 3

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{7+x} = 2$.

b) Rezolvați in mulțimea numerelor reale ecuația

$$4(x-3)^{log_6(x^2+11)} + 2(x^2+11)^{log_6(x-3)} = 6(x-3)^2.$$

c) Determinați domeniul maxim de definiție al funcției

$$f: D \to \mathbb{R}, f(x) = log_{0,01-x}(lg^2x^2 + 12lgx + 8)$$

SOLUȚIE:

a) Notează $a = \sqrt[3]{1-x}, b = \sqrt{7+x}, x \in [-7, \infty)$ și $a + b = 2, a^3 + b^2 = 8$ de unde obține

$a^3 + a^2 - 4a - 4 = 0$...1p

Determină $a \in \{-2, -1, 2\}\ de\ unde\ obține\ x \in \{-7, 2, 9\}\ care\ convin$................................1p

b) Deoarece $(x^2+11)^{\log_6(x-3)} = (x-3)^{\log_6(x^2+11)}\ cu\ x \in (3, \infty)$, obține ecuația echivalentă

$(x-3)^{\log_6(x^2+11)} = (x-3)^2$...1p

Găsește $\log_6(x^2+11) = 2\ sau\ x - 3 = 1$, de unde obține $x \in \{4,5\}$, care convin...............1p

c) Pune condițiile de existență: $\begin{cases} lg^2x^2 + 12lgx + 8 > 0 \\ 0,01 - x > 0 \\ 0,01 - x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$ 1p

$lg^2x^2 + 12lgx + 8 > 0 \Leftrightarrow lg^2x + 3lgx + 2 > 0 \Leftrightarrow lgx \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$.............1p

Finalizare $\begin{cases} x \in \left(-\infty, \frac{1}{100}\right) \cup \left(\frac{1}{10}, \infty\right) \\ x \in \left(-\infty, \frac{1}{100}\right) \\ x \neq -\frac{99}{100} \\ x \in (0, \infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{100}\right)$ 1p

SUBIECTUL 4

Andrei și Bogdan locuiesc pe aceeași stradă liniară în casele A și B de afixe $z_A = 1 - i\ și\ z_B = -1 + i$.

a) Determinați distanța dintre cele două case.

b) Cezar și Dan vor să-și construiască câte o casă C și D de o parte și de alta a străzii AB astfel încât cele patru case să fie vârfurile unui romb cu latura egală cu distanța dintre casele lui Andrei și Bogdan. Determinați afixele punctelor C și D.

c) *Determinați numărul real m știind că Marian are un magazin M de afix* $z_M = 5 + mi$ *pe strada pe care locuiesc Andrei și Bogdan astfel încât casa lui Andrei să fie situată între casa lui Bogdan și magazin (M-A-B coliniare).*

SOLUȚIE:

a) $AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{2}$...1p

b) $\Delta ABC\ echilateral \Longrightarrow |z_B - z_A| = |z_A - z_C| = |z_B - z_C|$ unde C are afixul

$z_c = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ 1p

Deduce $(a-1)^2 + (b+1)^2 = (a+1)^2 + (b-1)^2 = 8$..1p

Obține $a = b\ și\ a = \pm\sqrt{3}$ și găsește punctele C și D de afixe $z_C = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$ și

$z_D = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$..1p

c) Deoarece $A \in (MB) \Rightarrow \frac{z_M - z_B}{z_A - z_B} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{6+(m-1)i}{2-2i} \in \mathbb{R}$...1p

Obține $\frac{7-m}{4} + \frac{m+5}{4}i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = -5$...2p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XI –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *și* $M_a = I_2 + aA$, *unde* a *este număr real.*

a) Arătați că $5M_3 - 4M_{-1} = M_{19}$.
b) Determinați valorile reale ale lui a *pentru care matricea* M_a *este inversabilă.*
c) Determinați valorile reale ale lui a *pentru care* $M_a \cdot M_a = M_0$.

Soluție:

a) $5M_3 - 4M_{-1} = 5(I_2 + 3A) - 4(I_2 - A)$ 1p
$= 5I_2 + 15A - 4I_2 + 4A = I_2 + 19A = M_{19}$ 1p

b) $M_a = \begin{pmatrix} 1-3a & 3a \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M_a) = (1-3a)(1+a) + 3a^2 = 1 - 2a$ 1p
Matricea M_a este inversabilă $\Leftrightarrow \det(M_a) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ 1p

c) $M_a \cdot M_b = I_2 + aA + bA + abA^2, A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -2A$ 1p
$\Rightarrow M_a \cdot M_b = M_{a+b-2ab}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, deci $M_a \cdot M_a = M_0 \Leftrightarrow M_{2a-2a^2} = M_0 \Leftrightarrow$ 1p
$\Leftrightarrow 2a - 2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ sau $a = 1$ 1p

Subiectul 2.

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ *și* $g(x) = x^3 + x^2 + 2x$.

a) Arătați că numărul $C = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+f(x)} - \sqrt{f(x)}}{x}$ *este rațional.*
b) Să se determine abscisa pozitivă a punctului de pe graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$, *în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta* d *de ecuație* $y = 5x + 1$.
c) Demonstrați că ecuația $g(x) = f(x) + 3$ *are o soluție reală unică aflată în intervalul* $(1,2)$.

Soluţie:

a) $C = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ 1p

b) $h(x) = g(x) - f(x) = x^3 + 2x - 1$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$ deoarece conţine operaţii cu funcții elementare, deci derivabile şi va admite tangentă în orice punct de pe graficul său....................1p
Tangenta la graficul lui h în $x = x_0$ are ecuaţia: $y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$ şi panta $m_1 = h'(x_0)$ 1p
Dreapta d, de ecuaţie $y = 5x + 1$, are panta $m_2 = 5$, iar tangenta şi d sunt paralele dacă $m_1 = m_2$ 1p
Din $h'(x) = 3x^2 + 2$ şi $m_1 = m_2 \Rightarrow 3{x_0}^2 + 2 = 5 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$, convine $x_0 = 1$ 1p

c) Considerăm funcția $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = g(x) - f(x) - 3 \Rightarrow f_1(x) = x^3 + 2x - 4$.
Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow R = \frac{f_1(x_1) - f_1(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{{x_1}^3 - {x_2}^3 + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)\cdot(x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2) + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$
$\Rightarrow R = \frac{(x_1 - x_2)\cdot(x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2} = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + 2 > 0 \Rightarrow f_1$ este strict crescătoare (sau orice altă metodă de a arăta monotonia funcției f_1) 1p

Remarcând și faptul că f_1 este continuă pe $\mathbb{R}$, iar $f_1(1) = -1 < 0$ și $f_1(2) = 8 > 0 \Rightarrow$există un singur $x_0 \in (1,2)$, astfel încât $f_1(x_0) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat 1p

Subiectul 3.

Prețul de vânzare (măsurat în bitcoin) al unor acțiuni a fost urmărit începând de la momentul 1 *(când au fost plasate pe piață la bursa de la New York) până la momentul T (când s-au epuizat). Prețul maxim de vânzare a fost atins la momentul* t_0. *Prețul acțiunilor a înregistrat o variație dată de funcția*

$P: [1;T] \to (0,3]$, $P(t) = \begin{cases} 2^t - 1, & 1 \le t \le t_0 \\ 4 - \sqrt{t-a}, & t_0 < t \le T \end{cases}$ *unde* $a \in \mathbb{R}$, *t este timpul de tranzacționare măsurat în ore iar* t_0 *este momentul la care prețul de vânzare atinge pragul maxim de* 3 *bitcoin.*

a) Găsiți t_0.

b) Să se găsească $a \in \mathbb{R}$ *știind că în prețul tranzacționării acțiunilor nu s-a observat nici un moment de discontinuitate.*

c) Pentru $a = 1$, *aflați T știind că prețul ultimei acțiuni a fost egal cu prețul de la momentul plasării pe piață.*

Soluție

a) $P(t_0) = 3 \Leftrightarrow 2^{t_0} - 1 = 3 \Leftrightarrow 2^{t_0} = 4 \Leftrightarrow t_0 = 2$ 2p

b) Funcția *P* nu are discontinuități, deci *P* este continuă inclusiv în $t_0 = 2$, adică vom avea 1p

$\lim\limits_{\substack{t\to 2\\ t<2}} P(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 2\\ t>2}} P(t) = P(2) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{t\to 2\\ t<2}} (2^t - 1) = \lim\limits_{\substack{t\to 2\\ t>2}} \left(4 - \sqrt{t-a}\right) = 2^2 - 1 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{2-a} = 3$ 1p

Obținem $\sqrt{2-a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$ 1p

c) La momentul epuizării pachetului $P(T) = P(1) = 2^1 - 1 = 1$ 1p

Vom avea deci $4 - \sqrt{T-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{T-1} = 3 \Leftrightarrow T - 1 = 9 \Leftrightarrow T = 10$ 1p

Subiectul 4.

O firmă de construcții realizează planul unei autostrăzi între localitățile A și B cu coordonatele (20, 30) , respectiv (60,110) unde 1 u.m. pe schița cadastrală reprezintă 1 km real. Autostrada va asigura drumul cel mai scurt între cele două localități și va traversa o zonă cu pădure.

a) Să demonstreze că localitatea M , cu coordonatele (30, 50) se află pe traseul de construcție al viitoarei autostrăzi.

b) Știind că zona împădurită este situată de o parte și de alta a autostrăzii și este delimitată de punctele M , N (a, 70) și P (50, 60) pe schița cadastrală, aflați parametrul real a știind că suprafața pădurii este de 250 km².

Soluție:

a) *M* se află pe traseul autostrăzii $\Leftrightarrow A, M, B$ coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$...2p

Obținem $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 30 & 1 \\ 30 & 50 & 1 \\ 60 & 110 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci localitatea M se află pe traseul autostrăzii.....................1p

b) Suprafața pădurii este dată de aria triunghiului *MNP* 1p

Avem $D_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 30 & 50 & 1 \\ a & 70 & 1 \\ 50 & 60 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (10a - 700)$; $Aria_{MNP} = |D_{MNP}| = 250$........1p

$\Leftrightarrow |10a - 700| = 500 \Leftrightarrow a = 120$ sau $a = 20$ 1p

Convine doar soluția $a = 20$, deoarece, pentru $a = 120$, pădurea s-ar afla doar de o parte a autostrăzii 1p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană, Iaşi
08.03.2025
Clasa a XII-a filieră tehnologică – secțiunea H1
Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Fie $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$ *și mulțimea* $G = \left\{X(a) = I_2 + aA, \text{unde } a \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right\}$

a) *Demonstrați că* $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 2ab),\ \forall X(a), X(b) \in G$;

b) *Admitem că* $(G,\cdot)$*este grup abelian. Aflați numărul real m astfel încât funcția* $f: (\mathbb{R}^*,\cdot) \to (G,\cdot), f(x) = X(\frac{x+m}{2})$ *este izomorfism de grupuri;*

c) *Câte perechi de numere întregi de forma (a,b) există, astfel încât* $X(a)X(b) = X(5)$?

Soluție:

a) $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2^2 + bI_2A + aAI_2 + abA^2$

$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ -14 & -10 \end{pmatrix} = 2A$ 1p

$X(a)X(b) = I_2 + bA + aA + 2abA = I_2 + (a + b + 2ab)A = X(a + b + 2ab)$.................... 1p

b)Dacă f este izomorfism atunci $f(e_1) = e_2$, unde $e_1 = 1$ este elementul neutru din grupul $(\mathbb{R}^*,\cdot)$..1p

iar $e_2 = X(0)$ este elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$ 1p

$f(1) = X(0),\ f(1) = X\left(\frac{1+m}{2}\right) \Rightarrow \frac{1+m}{2} = 0 \Rightarrow m = -1$ 1p

c) $X(a)X(b) = X(5) \Rightarrow a + b + 2ab = 5$

$2\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 5 \Rightarrow (2a + 1)(2b + 1) = 11$ 1p

$2a + 1, 2b + 1$ sunt divizori întregi ai lui 11

$(a, b) \in \{(0,5);\ (5,0);\ (-1,-6);\ (-6,-1)\} \Rightarrow$ 4 perechi. 1p

Subiectul 2

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ *se definesc legile de compoziție* $x \circ y = x + y + \hat{3}$ *și* $x * y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y$.

a) *Să se demonstreze distributivitatea legii de compoziție “$*$” față de legea de compoziție “$\circ$”.*

b) Să se verifice dacă tripletul $(\mathbb{Z}_6,\circ,*)$ este inel comutativ.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x * \hat{2} = \hat{2}y + \hat{3} \\ x \circ y = \hat{5} \end{cases}$.

Soluție:

a)$x * (y \circ z) = xy + xz + \hat{3}y + \hat{3}z + 3$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}_6$

$(x * y) \circ (x * z) = xy + xz + \hat{3}y + \hat{3}z + 3$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}_6$ 1p

$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}_6 \Rightarrow$ legea “$*$” este distributivă în raport cu legea de compoziție “$\circ$” 1p

b)$(\mathbb{Z}_6,\circ)$ grup comutativ cu elementul neutru $e_1 = \hat{3}$ și $\forall\, x \in \mathbb{Z}_6$ este simetrizabil, unde

$x' = -x \in \mathbb{Z}_6$ 1p

$(\mathbb{Z}_6 \setminus \{\hat{3}\}, *)$ este monoid comutativ cu elementul neutru $e_2 = \hat{4}$ 1p

Având în vedere și proprietatea de distributivitate demonstrată la **a)**

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_6, \circ, *)$ este inel comutativ 1p

c) $\begin{cases} x * \hat{2} = \hat{2}y + \hat{3} \\ x \circ y = \hat{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{5}x = \hat{2}y + \hat{3} \\ x + y + \hat{3} = \hat{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{5}x = \hat{2}y + \hat{3} \\ x = \hat{2} + \hat{5}y \end{cases}$ 1p

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{4} + y = \hat{2}y + \hat{3} \\ x = \hat{2} + \hat{5}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \hat{1} \\ x = \hat{1} \end{cases}$ 1p

Subiectul 3

Se consideră $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$ *, pentru* $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) *Să se calculeze* I_1 *;*

b) *Să se arate că* $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$ *,* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$*;*

c) *Să se demonstreze că* $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$ *,* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *.*

Soluție:

a) $I_1 = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{6}$ 1p

b) $I_n = \int_0^1 (x)' \cdot (x - x^2)^n dx = -n \int_0^1 (x - 2x^2)(x - x^2)^{n-1} dx =$ 1p

$= -n \int_0^1 (2x - 2x^2 - x)(x - x^2)^n dx = -2nI_n + \frac{n}{2} \int_0^1 2x \cdot (x - x^2)^{n-1} dx =$ 1p

$= -2nI_n - \frac{n}{2} \int_0^1 (x - x^2)'(x - x^2)^{n-1} dx + \frac{n}{2} \int_0^1 (x - x^2)^{n-1} dx =$

$= -2nI_n + \frac{n}{2} I_{n-1} - \frac{n}{2} \int_0^0 t^{n-1} dt = -2nI_n + \frac{n}{2} I_{n-1}$ 1p

$(2n + 1)I_n = \frac{n}{2} I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$ 1p

c) Fie funcția de gradul al doilea $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$

$x_V = \frac{1}{2}$ punctul de maxim al funcției f și $y_V = \frac{1}{4}$ maximul funcției pe intervalul [0,1]

$f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$

Pentru $\forall x \in [0,1]$ avem $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq (x - x^2)^n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

$\Rightarrow 0(1 - 0) \leq \int_0^1 (x - x^2)^n dx \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (1 - 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

din aplicarea proprietății de medie a integralei definite 1p

Subiectul 4

În urma unui studiu referitor la memoria elevilor, s-a constatat că numărul de cuvinte noi din vocabularul limbii franceze memorate de un elev în t *minute de la începerea unei ore de clasă este dat de* $[M(t)]$, *partea întreagă a lui* $M(t)$, *unde* $M(t) = |f(t)|$, *iar* $f: [0,50] \to \mathbb{R}$ *este o funcție derivabilă care verifică pentru orice* $t \in [0,50]$ *relația* $f'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}16t$.

a) *Aflați funcția* f *și numărul de cuvinte memorate de un elev în primele* 10 *minute ale unei ore de limba franceză.*

b) *Demonstrați că numărul de cuvinte noi memorate de un elev crește pe parcursul unei ore de clasă și determinați câte cuvinte noi memorează un elev în ultimele* 20 minute *dintr-o oră de clasă, cu durata de* 50 minute.

Soluție:

a) $\int f'(t)dt = \int \left(\frac{3}{1000}t^2 - \frac{16}{100}t\right)dt = \frac{1}{1000}t^3 - \frac{8}{100}t^2 + C$ 1p

Știind că $\int f'(t)dt = f(t) + C \Rightarrow f(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}08t^2 + C$ 1p

Deoarece vorbim doar despre cuvintele noi, atunci avem $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ 1p

Numărul căutat este $[M(10)] = 7$ 1p

b) Se observă că:

$f(t) = 0{,}001t^2 \cdot (t - 80) \leq 0, \forall t \in [0,50]$ și

$f'(t) = 0{,}001t \cdot (3t - 160) < 0, \forall t \in (0,50]$ 1p

Deci $M(t) = -f(t)$ și $M'(t) = -f'(t) > 0, \forall t \in (0,50]$

Se obține astfel că M - funcție strict crescătoare și $[M]$ – funcție crescătoare pe $[0,50]$ …... 1p

Deoarece

$M(50) = \left|\frac{1}{1000} \cdot 50^3 - \frac{8}{100} \cdot 50^2\right| = 75$ și

$M(30) = \left|\frac{1}{1000} \cdot 30^3 - \frac{8}{100} \cdot 30^2\right| = 45$,

numărul căutat este $M(50) - M(30) = 75 - 45 = 30$ 1p