Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a IX –a – secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1

a) Demonstrați că $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$. Când are loc egalitatea?

b) Demonstrați că dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \text{ unde } p=\frac{a+b+c}{2}.$$

c) Determinați natura unui triunghi cu laturile de lungime a,b,c știind că

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Subiectul 2

O mulțime $A\subset\mathbb{N}^*$ cu n elemente este *perfectă* dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului de elemente.

a) Determinați mulțimile *perfecte* cu trei elemente.

b) Arătați că orice mulțime *perfectă* conține cel puțin un număr impar.

c) Dacă mulțimea A este *perfectă* și are n elemente, toate numere naturale consecutive, arătați că n este impar.

Subiectul 3

Fie $E(k)=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\ldots+\left[\sqrt{k}\right], k\in\mathbb{N}^*$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) Calculați $E(50)$.

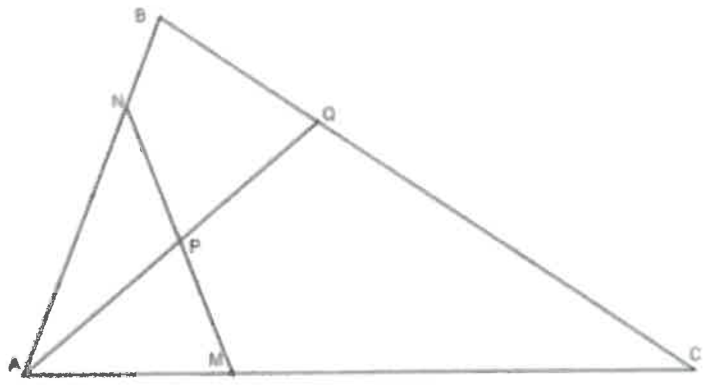
b) Determinați cel mai mic număr natural k pentru care $E(k)\geq 500$.

c) Rezolvați ecuația $E\left(n^2\right)=m$, unde numerele m și n sunt numere naturale prime între ele.

Subiectul 4

În figura următoare este prezentată schematic o rețea de drumuri, în linie dreaptă, între localitățile indicate în figură: A,B,C,M,N,P și Q. Localitatea M este situată pe drumul AC astfel încât $AM=40\,km$, $MC=80\,km$. Localitatea N este situată pe drumul AB astfel încât

$\overrightarrow{AN}+3\overrightarrow{BN}=\vec{0}$. Localitatea P este situată pe drumul MN la egală distanță de localitățile M și N. Localitatea Q este pe drumul BC, $BC=260\,km$, astfel încât punctele A,P,Q sunt coliniare și $CQ=k\cdot QB, k>0$.



a) Arătați că $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$.

b) Exprimați vectorul $\overrightarrow{AQ}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ și de constanta k.

c) Determinați constanta k și lungimea segmentului CQ.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a X –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1

O planetă acoperită în întregime de apă descrie o rotație completă în jurul stelei sale într-un an de 360 de zile. Temperatura medie a apei de pe planetă în cea de-a n-a zi a anului, exprimată în grade Celsius, este dată de formula $T(n)=\frac{100}{3}+\frac{200\cdot sin(n^\circ)}{3}$, unde $n\in\{1,2,3,\ldots,360\}$.

a) În câte zile ale unui an este planeta înghețată, știind că apa îngheață la $0^\circ C$?

b) Care este temperatura medie maximă a apei de pe acea planetă de-a lungul unui an?

Subiectul 2

a) Determinați mulțimea $A=\left\{n\in\mathbb{N} \mid \sqrt{n^2+n+15}\in\mathbb{Q}\right\}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_{\frac{x}{2}} 8+\log_{\frac{x}{4}} 8\le\frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4}$.

Subiectul 3

a) Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{xyz}}$, $\forall\, x,y,z\in(0,+\infty)$.

b) Fie a, b și c trei numere complexe nenule având același modul. Arătați că $a+b+c=0$ dacă și numai dacă $ab+bc+ca=0$.

Subiectul 4

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=\log_7\left(6^x+1\right)$.

a) Arătați că funcția f este inversabilă și determinați inversa sa.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7\left(6^x+1\right)=\log_6\left(7^x-1\right)$.

Gazeta Matematică 12/2024 (Supliment)

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici"
Etapa judeţeană
08 martie 2025
Clasa a XI –a – Secţiunea H2 - Profil real, specializarea ştiinţe ale naturii

Subiectul 1

Două funcţii $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se numesc *prietene* dacă există şi este finită limita, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) + g(x))$.

a) Arătaţi că funcţiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2}$ şi $g(x) = -2x$ sunt *prietene*.

b) Determinaţi numerele reale a, b cu $a > 0$ astfel încât funcţiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 4}$ şi $g(x) = -2x + b$ să fie *prietene*.

c) Daţi un exemplu de trei funcţii $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţiile f şi h respectiv g şi h să fie *prietene*, dar f şi g să nu fie *prietene*.

Subiectul 2

Considerăm funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathrm{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] - 1 & , x < 0 \\ e^x - cosx - 1, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $\left[\frac{1}{x}\right]$ este partea întreagă a lui $\frac{1}{x}$. Arătaţi că:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$;

b) Funcţia f nu are proprietate a lui Darboux pe $\mathbb{R}$;

c) Ecuaţia $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ are o infinitate de soluţii, cel puţin una pozitivă.

Subiectul 3

O matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se numeşte *interesantă* dacă are suma elementelor de pe diagonala principală egală cu zero. Considerăm matricele $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi

$M(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$.

a) Fie A o matrice *interesantă*. Arătaţi că există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât toate elementele de pe diagonala principală a matricei $A - SM(a,b)S^{-1}$ să fie egale cu zero.

b) Arătaţi că orice matrice *interesantă* poate fi scrisă ca suma a trei matrice nilpotente. (O matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se numeşte nilpotentă dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $X^n = O_3$).

c) Daţi un exemplu de trei matrice $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ care să verifice $X + Y + Z = B$ şi $X^3 = Y^3 = Z^3$ unde $B = \begin{pmatrix} 2025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2025 \end{pmatrix}$.

Subiectul 4

Ana vrea să planteze, în grădina sa, trei copaci. Considerăm că suprafaţa grădinii este raportată la reperul cartezian xOy, unitatea de măsură, pe axele reperului, fiind egală cu 1m. Un peisagist i-a sugerat să planteze primul copac în punctul $A(3,0)$; al doilea copac să-l planteze pe dreapta (*d*) de ecuaţie $4x - y - 12 = 0$, la o distanţă egală cu $\sqrt{17}\, m$ faţă de primul copac; iar ultimul copac să-l planteze pe parabola p de ecuaţie $y = x^2$.

Ana îşi doreşte ca aria suprafeţei triunghiulare determinată de cei trei copaci să fie minimă.

a) Ajut-o pe Ana să determine poziţiile celor trei copaci.

b) Scrieţi ecuaţia dreptei pe care sunt situaţi al doilea şi al treilea copac.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa judeţeană
08 martie 2025
Clasa a XII –a – Secţiunea H2 - Profil real, specializarea ştiinţe ale naturii

Subiectul 1

Fie $G_k = (-k,k)$, $k>0$ şi operaţia $x*y = \dfrac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$, $\forall\ x,y \in G_k$.

a) Să se demonstreze că G_k este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operaţia „$*$”.

b) Demonstraţi că legea „$*$” este asociativă.

c) Ştiind că $(G_k,*)$ este grup abelian, să se demonstreze că funcţia $f: G_1 \to (0,+\infty)$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ este un izomorfism între grupurile $(G_1,*)$ şi $((0,+\infty),\cdot)$.

d) Determinaţi numărul natural n pentru care avem, în grupul abelian $(G_1,*)$, ecuaţia:

$$\frac{1}{7}*\frac{1}{17}*\frac{1}{31}*\ldots*\frac{1}{2n^2-1}=\frac{506}{1519}.$$

Subiectul 2

Fie $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{x^2+1}dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi I_1, I_2.

b) Arătaţi că $I_1 + I_3 + I_5 + \ldots + I_{2025}$ este număr iraţional.

c) Comparaţi I_n şi I_{n+2} şi calculaţi $[2000 \cdot I_{50}]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Subiectul 3

Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+2n), n\in\mathbb{N}^*$ şi $A_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Calculaţi A_1.

b) Calculaţi $\int_1^e \dfrac{f_1(x)}{x+1}\ln x dx$ şi $\int_1^2 \dfrac{f_1(x)}{(x+1)(x^2+4x)}dx$.

c) Arătaţi că: $(2n+1)\cdot A_n < \left(\dfrac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 4

Maria scrie pe tablă numerele 1, 2, 3, ... , 2025. La fiecare pas, ea alege două numere oarecare x și y din șirul scris pe tablă și le înlocuiește cu $x * y = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{xy}}$, continuând procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr scris.

a) Dacă Maria șterge la primul pas numerele 2 și 3, aflați ce număr scrie în locul lor.

b) Arătați că dacă Maria șterge de pe tablă numerele a și b și scrie în locul lor numărul c, atunci are loc egalitatea: $\dfrac{1}{c} + 1 = \left(\dfrac{1}{a} + 1\right)\left(\dfrac{1}{b} + 1\right)$.

c) Dacă la un anumit moment, numerele existente pe tablă sunt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 2025$, arătați că expresia $E = \left(\dfrac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\dfrac{1}{x_n} + 1\right)$ este invariantă (nu se modifică atunci când ștergem, de exemplu numerele x_1, x_2 și scriem în locul acestora numărul $x_1 * x_2$).

d) Aflați numărul rămas pe tablă după 2024 de pași.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.