Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici"
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a IX –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1

a) Să se determine primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25} = 950$ și $2a_3 - a_7 = -4$.

b) Fie șirul de numere reale $(c_n)_{n\geq 1}$, definit prin $c_1 = 1$, $c_{n+1} - 2c_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$, definit prin $b_n = 1 + c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este o progresie geometrică.

Subiectul 2

În triunghiul ABC se consideră punctul E mijlocul segmentului $[AB]$, F mijlocul medianei din C, $D \in (BC)$ astfel încât $BD = 2 \cdot DC$ și $P \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AC}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BA}$.

b) Să se arate că punctele A, F și D sunt coliniare.

c) Să se calculeze raportul $\frac{AF}{AD}$.

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

a) Să se determine soluțiile reale ale ecuației: $\left(f(x)\right)^2 + 2 \cdot f(x) - 3 = 0$.

b) Determinați funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = \underbrace{f \circ f \circ f \ldots \circ f}_{f \text{ este de } n \text{ ori}}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar " $\circ$ " reprezintă compunerea funcțiilor.

c) Să se calculeze: $f(1) \cdot f(2) + f(2) \cdot f(3) + \cdots + f(99) \cdot f(100) + f(100) \cdot f(101)$.

Subiectul 4.

Trei motocicliști, A, B și C, parcurg aceeași distanță, traiectoria lor fiind o linie dreaptă. Motociclistul B parcurge distanța cu viteza de $60 km/h$, iar motociclistul C cu viteza de $40 km/h$. Știind că B merge cu 2 ore mai puțin decât A, iar C merge cu 2 ore mai mult decât A, determinați viteza motociclistului A. Legea mișcării este $v = \frac{d}{t}$, unde v este viteza$[km/h]$, d este distanța$[km]$, iar t este timpul$[h]$.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Inspectoratul Școlar Județean Iași

CMMI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici"
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a X –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1

Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x + x$.

a) Demonstrați că $n = f(3\log_2 5) - f(\log_2 500)$ este un număr întreg.

b) Să se arate ca funcția f este injectivă.

c) Rezolvați în mulțimea $(0, \pi)$ ecuația $2^{sin^2 x} - 2^{cos^2 x} = cos2x$.

Subiectul 2

Fie ecuația $(1 + i)x^2 - 2mx + m - i = 0, m \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $m = 1$ rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe.

a) Pentru $m = -1$, arătați că numărul $\frac{1}{x_1^2+x_1-2} + \frac{1}{x_2^2+x_2-2}$ este real, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației.

b) Determinați numerele reale m pentru care ecuația are o rădăcină reală.

Subiectul 3.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{7+x} = 2$.

b) Rezolvați in mulțimea numerelor reale ecuația

$$4(x-3)^{\log_6(x^2+11)} + 2(x^2+11)^{\log_6(x-3)} = 6(x-3)^2.$$

c) Determinați domeniul maxim de definiție al funcției

$$f:D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{0,01-x}(lg^2 x^2 + 12lgx + 8)$$

Subiectul 4.

Andrei și Bogdan locuiesc pe aceeași stradă (liniară) în casele A și B de afixe $z_A = 1 - i$ și $z_B = -1 + i$.

a) Determinați distanța dintre cele două case.

b) Cezar și Dan vor să-și construiască câte o casă C și D de o parte și de alta a străzii AB astfel încât cele patru case să fie vârfurile unui romb cu latura egală cu distanța dintre casele lui Andrei și Bogdan. Determinați afixele punctelor C și D.

c) Determinați numărul real m știind că Marian are un magazin M de afix $z_M = 5 + mi$ pe strada pe care locuiesc Andrei și Bogdan astfel încât casa lui Andrei să fie între casa lui Bogdan și magazin (M-A-B coliniare).

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici"
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XI –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_a = I_2 + aA$, unde a este număr real.

a) Arătați că $5M_3 - 4M_{-1} = M_{19}$.
b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea M_a este inversabilă.
c) Determinați valorile reale ale lui a pentru care $M_a \cdot M_a = M_0$.

Subiectul 2

Se consideră funcțiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$ și $g(x) = x^3 + x^2 + 2x$.

a) Arătați că numărul $C = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+f(x)} - \sqrt{f(x)}}{x}$ este rațional.
b) Să se determine abscisa pozitivă a punctului de pe graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = g(x) - f(x)$, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d de ecuație $y = 5x + 1$.
c) Demonstrați că ecuația $g(x) = f(x) + 3$ are o soluție reală unică aflată în intervalul $(1; 2)$.

Subiectul 3.

Prețul de vânzare (măsurat în bitcoin) al unor acțiuni a fost urmărit începând de la momentul 1 (când au fost plasate pe piață la bursa de la New York) până la momentul T (când s-au epuizat). Prețul maxim de vânzare a fost atins la momentul t_0. Prețul acțiunilor a înregistrat o variație dată de funcția

$P: [1; T] \to (0,3], P(t) = \begin{cases} 2^t - 1, 1 \le t \le t_0 \\ 4 - \sqrt{t-a}, t_0 < t \le T \end{cases}$ unde $a \in \mathbb{R}$, t este timpul de tranzacționare măsurat în ore, iar t_0 este momentul la care prețul de vânzare atinge pragul maxim de 3 bitcoin.

a) Găsiți t_0.
b) Să se găsească $a \in \mathbb{R}$ știind că în prețul tranzacționării acțiunilor nu s-a înregistrat nici un moment de discontinuitate.
c) Pentru $a = 1$, aflați T știind că prețul ultimei acțiuni a fost egal cu prețul de la momentul plasării pe piață.

Subiectul 4.

O firmă de construcții realizează planul unei autostrăzi între localitățile A și B cu coordonatele (20, 30), respectiv (60,110) unde 1 u.m. pe schița cadastrală reprezintă 1 km real. Autostrada va asigura drumul cel mai scurt între cele două localități și va traversa o zonă cu pădure.

a) Să demonstreze că localitatea M , cu coordonatele (30, 50) se află pe traseul de construcție al viitoarei autostrăzi.
b) Știind că zona împădurită este situată de o parte și de alta a autostrăzii și este delimitată de punctele M , N (a, 70) și P (50, 60) pe schița cadastrală, aflați parametrul real a știind că suprafața pădurii este de 250 km^2.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

Inspectoratul Școlar Județean Iași

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XII –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1

Fie $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{X(a) = I_2 + aA, \text{unde } a \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 2ab),\ \forall X(a), X(b) \in G$.

b) Admitem că $(G,\cdot)$ este grup abelian. Aflați numărul real m astfel încât funcția $f: (\mathbb{R}^*,\cdot) \to (G,\cdot), f(x) = X(\frac{x+m}{2})$ este izomorfism de grupuri.

c) Câte perechi de numere întregi de forma (a,b) există, astfel încât $X(a)X(b) = X(5)$?

Subiectul 2

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definesc legile de compoziție $x \circ y = x + y + \hat{3}$ și $x * y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y$.

a) Să se demonstreze distributivitatea legii de compoziție “$*$” față de legea de compoziție “$\circ$”.

b) Să se verifice dacă tripletul $(\mathbb{Z}_6,\circ,*)$ este inel comutativ.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x * \hat{2} = \hat{2}y + \hat{3} \\ x \circ y = \hat{5} \end{cases}$.

Subiectul 3

Se consideră $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

c) Să se demonstreze că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 4

În urma unui studiu referitor la memoria elevilor, s-a constatat că numărul de cuvinte noi din vocabularul limbii franceze memorate de un elev în t minute de la începerea unei ore de clasă este dat de $[M(t)]$, partea întreagă a lui $M(t)$, unde $M(t) = |f(t)|$, iar $f: [0,50] \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă care verifică pentru orice $t \in [0,50]$ relația $f'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}16t$.

a) Aflați funcția f și numărul de cuvinte memorate de un elev în primele 10 minute ale unei ore de limba franceză.

b) Demonstrați că numărul de cuvinte noi memorate de un elev crește pe parcursul unei ore de clasă și determinați câte cuvinte noi memorează un elev în ultimele 20 minute dintr-o oră de clasă, cu durata de 50 minute.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.